A quick guide to Linear Algebra 2

Dualräume

Dualraum
Dualraum = $V^* = Hom(V,K)$
Wichtige Beispiele:
→ Projektion auf die i-te Koordinate
→ Auswertungsabbildung und Ableitungsabbildung (Polynome)
Duale Paarung
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v\rangle = v^*(v) \in K$
Duale Paarung ist linear in Beiden Argumenten:
$\langle \alpha v^* + \beta w^*, v\rangle = \alpha\langle v^*, v\rangle + \beta\langle w^*, v\rangle$
$\langle v^*, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle v^*, v\rangle + \beta\langle v^*, w\rangle$
Dimension Dualraum
Wenn V endlich Dimensional ist, dann gilt $dim(V) = dim(V^*)$
Basis des Dualraumes
$\langle v_i^*, v_j\rangle = \delta_{ij}$ (Also Covektoren, die für jeweils einen Basisvektor aus B_v 1 ergeben und bei den dann Restlichen 0)
Für $v^* \in V^*$ gilt als LK:
$v^* = \sum_{i=1}^{n} v^*(v_i)v_i^*$ wobei $v^*(v_i)$ die Koeffizienten sind.
Folglich ist die Basis abhängig von der Basis in B_v , jede Basis in B_v hat eigene "duale Basis".
Koordinatenvektoren von Vektoren und Linearformen
→ für $x = \Phi_{B_v}^{-1}(v)$ für $v \in V$ gilt: $x_i = \langle v_i^*, v\rangle$ i = 1,..,n
→ für $\xi = \Phi_{B_v^*}^{-1}(v^*)$ i = 1,...,n
Basiswechselmatrizen im Dualraum
Sei $T = \mathscr{T}_{\tilde{B}_v}^{B_v} = \mathscr{M}_{\tilde{B}_v}^{B_v}(id_v)$
Dann ist der wechsel der zwei dazugehörigen Dualbasen die transponierte inverse von T:
$T^{-T} = \mathscr{T}_{\tilde{B}_v^*}^{B_v^*}$

Annihilatoren

Annihilatoren
Ist $M \subseteq V$, dann ist der Annihilator:
$M^0 = \{v^* \in V^* | \langle v^*, v\rangle = 0 \; \forall v \in M\}$
Sei $F \subseteq V^*$, dann ist der Präannihilator:
${}^0F = \{v \in V | \langle v^*, v\rangle = 0 \; \forall v^* \in F\}$
Es gilt:
→ $\{0_v\}^0 = V^*$
→ $V^0 = \{0_{V^*}\}$
→ ${}^0\{0_{V^*}\} = V$
→ ${}^0(V^*) = \{0_V\}$
(Prä-)Annihilatoren sind Unterräume.
Sei B endliche Basis von V mit dualer Basis B^*.
→ ist $(v_1, ...v_k)$ eins Basis des Unterraums $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, ..., v_n^*)$ eine Basis vong U^0 und es gilt:
dim(U^0)= dim(V)-dim(U)= codim(U).
→ ist $(v_1^*, ...v_k^*)$ eins Basis des Unterraums $F \subseteq V^*$, dann ist $(v_{k+1}, ..., v_n)$ eine Basis vong ${}^0F$ und es gilt:
dim(${}^0F$)= dim(V^0)-dim(F)= dim(F)-dim(V)= codim(F).
Unterräume sind (Prä-)Annihilatoren
Für jeden Unterraum U von V gilt:
$U = \bigcap_{v^* \in U^0} Kern(v^*) = {}^0(U^0)$

Duale Homomorphsimen

dualeHoms
V,W K-Vektorräume mit $f \in Hom(V,W)$
$f^* : W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^*$
→ $\langle f^*(w^*), v\rangle = \langle w^*, f(v)\rangle$
Duale Homs sind wieder Homomorphismen:
$f^* \in Hom(W^*, V^*)$
Dualisieren einer Komposition
$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
Eigenschaften
→ Die Abbildung I, die jedem f ein f^* zuordnet ist injektiven Homomorphismus.
$I : Hom(V,W) \ni f \mapsto f^* \in Hom(W^*, V^*)$
→ Wenn V, W endlich-dimensional sogar ein Isomorphismus:
$dim(Hom(W^*, V^*)) = dim(Hom(V,W)) = dim(V)dim(W)$
FunFakt
Mit Auswahlaxiom kann man zeigen, dass I für unendlich dim V und endlich dim Bildraum W sogar Surjektiv ist. Und andernfalls nicht.
Allgemeine Aussagen zu dualen Homs
→ $f \in Hom(V,W)$ist injektiv wenn $f^* \in Hom(W^*, V^*)$ surjektiv ist.
→ $f \in Hom(V,W)$ist surjektiv wenn $f^* \in Hom(W^*, V^*)$ injektiv ist.
→ $f \in Hom(V,W)$ist bijektiv wenn $f^* \in Hom(W^*, V^*)$ bijektiv ist.
→ Wenn f und f^* beide bijektiv, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$
Dartellungsmatrizen dualer Homs
V, W endlich dims K-Vektorräume mit Basen B_v, B_w , f ein Hom und f^* dualer Hom, dann ist:
$A = \mathscr{M}_{B_w}^{B_v}(f)undA^T = \mathscr{M}_{B_v^*}^{B_w^*}(f^*)$
Es gilt:
Rang(f) = Rang (f^*)
$(f_A)^* = f_{A^T}$
Fundamentale Unterräume
$Bild(f^*) = Kern(f)^0$ in V^*
$Kern(f^*) = Bild(f)^0$ in W^*
$Bild(f) = {}^0 Kern(f^*)$ in W
$Kern(f) = {}^0 Bild(f^*) inV$
Selbiges gilt für f = A und * = T (also transponieren)
Dualraum eines Faktorraumes
$(V/U)^* \cong U^0$
Faktorraum eines Dualraums
$V^*/U^0 \cong U^*$

Bidualraum

Bidualraum
Der Bidualraum sind alle Linearformen auf V^*.
Für jedes feste $v \in V$ ist:
$V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v\rangle \in K$
eine Linearform auf V^*.
Kanonische Injektion
$i_v = V \ni v \mapsto \langle\cdot, v\rangle \in V^{**}$
Injektion(homomorphismus von V nach V^{**}) (Wenn V endlich dim ist, sogar eine Bijektion)
Wenn V endlich dimensional ist, gilt:
→ $\forall F \subseteq V^*$ gilt ${F^0} = i_v({}^0F)$
→ $\forall U \subseteq V$ (U ist Unterraum) gilt $(U^0)^0 = i_v(U)$
Bidualer Hom
→$f^{**} : V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} = v^{**} \circ f^* \in W^{**}$
→ $i_W \circ f = f^{**} \circ i_V$

Billineare Abbildungen

Bil-Abbildunden
→f mit $f : U \times V \to W$ heißt billinear, wenn in beiden Argumenten linear.
→ Menge aller Billienaren Abbildungen: Bil(U,V; W)
→ Wenn W = K, dann heißts Bilinearform
→ Bil(U,V;W) ist ein Unterraum von $W^{U \times V}$
Eindeutigkeitssatz/Tensorproduktraum
Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(v_j)_{j \in J}$ $vonV$ und $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familien von Vektoren in W.
→ Es gibt genau eine bil.Abbildung mit:
$f(u_i, v_j) = w_{ij} \forall (i,j) \in I \times J$
→ Diese Familie ist i.A keine Basis. → für bilineare Abbildungen gilt:
$f(\alpha u, v) = f(u, \alpha v)$
Ein Vektorraum, indem $(\alpha u, v) = (u, \alpha v)$ gilt, heißt Tensorprodukraum.
Konstruktion des Tensorproduktraums:
Seien U und V über K mit den Basen $(u_i)_{i \in I}$ und $(v_j)_{j \in J}$
Betrachte Unterraum von $K^{I \times J}$:
$U \otimes V = \{T : I \times J | T(i,j) \neq 0 \text{für endlich viele} (i,j)\}$
→ $u_i \otimes v_j = [(k,l) \mapsto \delta_{ik}\delta_{lj}]$ wobei $(k,l) \in I \times J$
→ $B = (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine Basis des Tensorproduktraumes.
Eigenschaften Tensorpüroduktraum
→ Elemente in $V \otimes U$ heißen Tensoren.
→ Die Abbildung die (u,v) auf $u \otimes v$ mapped heißt univerlesse bilineare Abbildung genannt.
→ Tensoren mit $u \otimes v$ und u,v $\neq 0$ heißen Elementartensoren.
Sei $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i$ und $v = \sum_{j \in J'} \beta_j v_j$ wobei I',J' endliche Teilmengen der Basisindexmengen sind.
$\otimes(u,v) = \otimes(\sum_{i \in I'} \alpha_i u_i, \sum_{j \in J'} \beta_j v_j) = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j)$
Es gilt weiter:
→ $dim(U \otimes V) = dim(U) \cdot dim(V)$
Rechenregeln
→ $(u \otimes v) + (\hat{u} \otimes v) = (u + \hat{u}) \otimes v$
→ $(u \otimes v) + (u \otimes \hat{v}) = u \otimes (v + \hat{v})$
→ $(\alpha u) \otimes v = \alpha(u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$
Rang eines Tensors
Rang(T) ist die minimale Anzahl an Summanden, sodass T darstellbar ist mit:
$T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ wobei u und v beliebige Vektoren aus V und U sind.
→ Der Nulltensor ist der einzige Tensor mit Rang 0.
→ Jeder Elementartensor, also $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ hat Rang 1
universelle Eigenschaft
→ $g \in Bil(U,V;W)$ $\exists !$ $f \in Hom(U \otimes V; W)$, sodass $g = f \circ \otimes$, also $g(u,v) = f(u \otimes v)$
→ Diese Zuordnung, also $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus.
weitere Isomorphismen
Sein V,U,W endlich dimensionale Vräume, über K.
$Hom(U \otimes V; W) \cong Bil(U,V;W) \cong Hom(U, Hom(V,W)) \cong Hom(V, Hom(U,W))$
Wenn W der Köprer ist, folgt
$Bil(U,V;K) \cong Hom(U \otimes V;K) \cong (U \otimes V)^* \cong Hom(U, V^*) \cong Hom(V, U^*)$

Multilineare Abbildungen

Multilin Abbildungen
→ Abbildungen f mit $f : V_1 \times \cdots \times V_N \to W$, die in allen Argumenten linear sind.
→ Menge aller: $Mult(V_1, ..., V_N; W)$
→ Es gilt der Eindeutigkeitssatz.
Tensorproduktraum multilinearer
Seien $V_1, ..., V_N$- K-Vräume mit $N \in \mathbb{N}_0$ und $(v_{1,i_1})_{i_1 \in I_1}, ..., (v_{N,i_N})_{i_N \in I_N}$
→ $\bigotimes_{i=1}^{N} V_i = \{T : I_1 \times ... \times I_N \to K | T(i_1, ..., i_N) \neq 0 \text{für endlich viele} (i_1, ..., i_N)\}$
→ Elemente davon heißen Tensoren der Stufe/Ordnung N.
→ universale multlilineare Abbildung:
$v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N} = [(K_1, ..., k_N) \mapsto \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_N k_N}]$
universelle Eigenschaft(Mult)
→$g \in Mult(V_1 \times \cdots \times V_N; W)$ $\exists !$ $f \in Hom(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N; W)$
, sodass $g = f \circ \otimes$
→ Diese Zuordnung, also $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Tensoren über Vektroraum

$\mathscr{T}_s^r(V) = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$
hier ist V r-mal tensoriert mit V^* s-mal tensoriert. Diese heißen Tensoren vom Typ (r,s) über V.
→ Basis davon ist: $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$
mit $1 \leqslant i_1, ..., i_r \leqslant nund1 \leqslant j_1, ..., j_s \leqslant n$
Jeder Tensor $T \in \mathscr{T}_s^r(V)$ ist eine LK:
$T = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n} T_{j_1,...,j_s}^{i_1,...,i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$
Dabei ist: $T_{j_1,...,j_s}^{i_1,...,i_r}$ die Komponenten, quasi als Matrix mit r+s Dimensionen und n^{r+s} Einträgen.
DIe Zuordnung: $\mathscr{T}_s^r(V) \ni T \mapsto T_{j_1,...,j_s}^{i_1,...,i_r} \in (K^n)^{r+s}$
ist ein Vraumisomorphismus.
Tensoren als Abbildungen
→ $\mathscr{T}_0^0(V) = K$
→ $\mathscr{T}_1^0(V) = V^* \cong Hom(V,K)$
→ $\mathscr{T}_0^1(V) = V \cong Hom(V^*, K)$
→$\mathscr{T}_2^0(V) = V^* \otimes V^* \cong Hom(V \otimes V, K) \cong Hom(V, V^*)$
→$\mathscr{T}_1^1(V) = V \otimes V^* \cong Hom(V^* \otimes V, K) \cong Hom(V,V) \cong Hom(V^*, V^*)$
→$\mathscr{T}_0^2(V) = V \otimes V \cong Hom(V^* \otimes V^*, K) \cong Hom(V^*, V)$
Symmetrische und Schiefsymmetrische
→ Tensoren $T \in \mathscr{T}_0^r$ sind symmetrisch, wenn gilt:
$T(\varepsilon^{i_1}, ..., \varepsilon^{i_r}) = T(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, ..., \varepsilon^{i_{\sigma(r)}})$
→ Tensoren $T \in \mathscr{T}_0^r$ sind schiefsymmetrsich, wenn gilt:
$T(\varepsilon^{i_1}, ..., \varepsilon^{i_r}) = (sgn\sigma) T(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, ..., \varepsilon^{i_{\sigma(r)}})$
→ Alternierender Tensor ist, wenn zwei verschiedene Argumente gleich sind, der Tensor = 0 wird
Eigenschaften
→Ist T alterniernd, dann ist T auch schiefsymmetrisch.
→ wenn $char(K) \neq 2$, so gilts auch umgekehrt.
→ wenn char(K) = 2, ist $\mathscr{T}_0^r(V)_{sym} = \mathscr{T}_0^r(V)_{skew}$
→ wenn r = 0 oder 1 gilt: $\mathscr{T}_0^r(V)_{sym} = \mathscr{T}_0^r(V)_{skew} = \mathscr{T}_0^r(V)$
Symmetrie auch für Komponenten
Es ist äquivalent:
→ $T \in \mathscr{T}_0^r(V)$ ist symmetrisch.
→ Die Komponenten sind $T^{i_1,...,i_r} = T^{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(r)}}$
und
→ $T \in \mathscr{T}_0^r(V)$ ist schiefsymmetrisch. → Die Komponenten sind
$T^{i_1,...,i_r} = (sgn\sigma) T^{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(r)}}$
→Die Menge der schiefsymmetrischen bzw. symmetrsichen Tensoren sind Unterräume.
Projektion
$P \in End(V)$ ist Projektion, wenn gilt: $P \circ P = P$
Eine Projektion auf den Unterraum Bild(P).
Der Endo:
$\mathscr{T}_0^r(V) \ni T \mapsto proj_{sym}(T) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \in \mathscr{T}_0^r(V)$
ist eine Projektion auf Menge der symmatrischen Tensoren.
Der Endo:
$\mathscr{T}_0^r(V) \ni T \mapsto proj_{skew}(T) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (sgn\sigma)\sigma(T) \in \mathscr{T}_0^r(V)$
ist eine Projektion auf Menge der schiefsymmatrischen Tensoren.
Dimension der Unterräume
V ein K-Raum mit char(K)≠ 2 und r ∈ $\mathbb{N}_0$ und dim(V)= n:
$dim(\mathscr{T}_0^r(V)_{skew}) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Determinanten Det-Form
V immer endlich dimensional
$\Delta : V^n \to K$ heißt determinantenform, wenn:
→ Δ eine n-lineare Form auf V^n ist.
→ Δ ist alterniernd.
→ Δ ist nicht die Nullform.
Δ wird durch genau einen $T \in \mathscr{T}_n^0$ repräsentiert
Es ist äquivalent:
→ T ist alterniernd.
→ Wenn $(v_1, ..., v_i)$ lin. abhängig ist, ist $T(v_1, ..., v_i) = 0$
Determinantenformform
$v \in V$ und $(b_1, ...b_i)$ einen Basis von V
und Δform auf V^n
→ $\Delta(v_1, ..., v_n) = (\sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n}) \cdot \Delta(b_1, ..., b_n)$
$\forall (v_1, ..., v_n) \in V^n$ mit T die eindeutige Matrix:
$v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_i$
Basiserkenner
Äquivalent:
↪ $\Delta(v_1, ..., v_n) \neq 0$
↪ $(v_1, ..., v_n)$ ist Basis von V.
Determinanten einer Matrix
Sei $a_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$ eins Matrix $\in V^n$
mit V = K^n also $V^n \cong K^{n \times n}$
$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$
Eigenschaften Determante
→ det(A) ist eine alternierende Mutlform der Spaltenvektoren von A.
→ $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$
→ $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A ist regulär ⇔ Rang(A)=n ⇔ $(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n})$ ist lin unabhäng.
→det(I)=1
→ det(AB)=det(A)det(B)
→ $det(A^{-1}) = 1/det(A)$, wenn A invertierbar.
→ $det(A^T) = det(A)$
→ Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante.
→ $det(A \in K_{\triangleright}^{n \times n}) = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$
→ $det(A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}) = det(A_{11})det(A_{22})$
(Block A_{21} , kann auch Block A_{12} sein) Für Elementare Zeilenumformungen gilt:
→ Matrix D: Typ 1: Multiplikation der i-ten Zeile mit einen Skalar $\alpha \Rightarrow$ det(D) = α
→ Matrix S: Typ 2: Addition des α-fachen zur i-ten Zeile:
⇒ $det(S) = 1$
→ Matrix T: Typ 3: Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile:
⇒ $det(T) = -1$
Begriffe
→ Streichungsmatrix: Die $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix, die sich ergibt, wenn man die i-te und die j-te Zeile streicht: $(A)_{\neq i, \neq j}$.
→ Unterdeterminante / Minor: Ist die Determinante der Streichungsmatrix: zum jeweiligen i und j: $[A]_{ij} = det((A)_{\neq i, \neq j})$
→ Kofaktor: $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}[A]_{ij}$ ist der Kofaktor von A zu den Indices i,j.
→ $cof(A) = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ heißt die Kofaktormatrix von A.
→ $adj(A) = cof(A)^T$ das Transponierte der cof(A), nennen wir die adjungierte Matrix von A.
Für die adjungierte gilt:
→ $adj(A)A = Aadj(A) = det(A)I$ (Bis aud den Faktor det(A)ist die adjungierte das Inverse von A)
Laplace Entwicklung
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det((A)_{\neq i, \neq j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij}$
Cramersche Regel
Sei A invertierbar, dann gilt für Ax=b, die einzelenen Koordinaten des Lösungsvetors:
$x_i = \frac{det(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, ..., a_{\cdot n})}{det(A)}$ für i = 1,...,n.
Also den Vektor b in die i-te Spate einsetzen.
Det von Endos
Sei f ein Endo, dann: det(f) = det(A) für $A = \mathscr{M}_{B_V}^{B_V}(f)$
Dabei ist die Basis egal, solange es dieselbe ist. (Weil ähnliche Matrizen ist det gleich).
→ $det(\alpha f) = \alpha^n det(f)$
→ $det(f) \neq 0 \Rightarrow f$invertierbar ⇔ $Rang(f) = n$
→ $det(id_V) = 1$
→ $det(f \circ g) = det(f)det(g)$
→ $det(f^{-1}) = 1/det(f)$, falls f invertierbar
→ $det(f^*) = det(f)$ für f^*, die zu f duale abbildung.
geordneter Körper
K ist geordnet, wenn es eine totalordnung $\leqslant$ gibt, sodass
$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$ und $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta \geqslant 0$
Rechenregeln im geordneten Körper
→ $\alpha \geqslant 0 \Rightarrow -\alpha \leqslant 0$
→ $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$
→ $\alpha \leqslant \beta, \gamma \geqslant 0 \Rightarrow \alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$
→ $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant 0 \Rightarrow \beta\gamma \leqslant \alpha\gamma$
→ $\alpha^2 \geqslant 0$
→ $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 > 0$
→ $\alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 0 \to \beta > \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$
→ $char(K) = 0$
orientierungtreuer Auto Sei $f \in Aut(V)$, wenn $det(f) > 0$ heißt er Orientierungstreu, wenn $det(f) < 0$ heißt er Orientieungsuntreu.
Orientierung von Basen
Zwei Basen B und G von V heißen gleich orientiert, wenn $det(\mathscr{T}_B^G) > 0$ gilt. Wenn die Determinante der Transformatrix < 0 ist, dann heißen die Basen umgekehrt orientiert.
→Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V (mit genau zwei Äuwivalenzklassen).

Normalformen

Diagonalisierbarkeit
Diagonalform = Eigenwerte entlang der Hauptdiagonalen. Besitzt ein Endo f über V mit dim(V) = n, genau n paarweise verschiedene Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.
Eigenschaften
→ f ist injektiv ⇔ 0 ist kein Eigenwert fon f.
→ Wenn $dim(V) = n \in \mathbb{N}$, f ist bijektiv ⇔ 0 ist kein Eigentwert von f.
Bestimmung von Eigenvektoren zu geg. Eigenwert
→ LGS Lösen: $(\lambda I - A)x = 0$
Äquivalent, wenn $n \in \mathbb{N}$
↪ A ist regulär
↪ 0 ist kein Eigenwert von A
Eigenraum
→ $Eig(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$
Geometrische Vielfachheit:
→ $\mu^{geo}(f, \lambda) = dim(Eig(f, \lambda))$
Gleiches gilt für Matrizen.
Eigenschaften:
→ $Eig(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von V.
→ $Eig(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f
→ $Eig(f, \lambda) \backslash \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren zu f.
→ $Eig(f, \lambda) = Kern(\lambda id_V - f)$
→ Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschieden,dann $Eig(f, \lambda_1) \cap Eig(f, \lambda_2) = \{0\}$
Gleiches gilt für Matrizen. Insbesondere ist Kern(A) der Eigenraum zu $0 \in K$
→ Eigenräume zu verschiedenen EIgenwert bilden direkte Summen.
Projektoren sind diagonalisierbar
Es gilt:
→ $V = Kern(P) \bigoplus Bild(P)$
→ P kann nur 0 oder 1 als Eigenwerte haben (merhfach möglich).

Berechnung von Eigenwerten

f ist Endo in einem endlichdim. V. Dann ist äquivalent
↪ λ ist ein Eigenwert von f.
↪ $det(\lambda id_V - f) = 0$
Gleiches gilt für die Dartellungsmatrizen.
charackteristisches Polynom
$\chi_A = det(\lambda I - A) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$
Die zahlen n_i heißen algebraische Vielfachheit von λ_i: $\mu^{alg}(A, \lambda_i) = n_i$
$\mu^{alg}(A, \lambda_i) = max\{k \in \mathbb{N} | (t - \lambda_i)^k | \chi_A\}$ Wir dürfen Polynome in Matrizen und det einsetzen, weil wir den rationalen Funktionskörper gebildet haben.
Spur
→ $Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
Eigenschaften charakteristisches Polynom
→ $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i \in K_n[\lambda]$
→ χ_A ist ein normiertes Polynom mit $deg(\chi_A) = n$, es gilt: $\alpha_n = 1$
Im Fall $n \geqslant 1$ gilt:
→ α_{n-1} = -Spur(A).
→ $\alpha_0 = (-1)^n det(A)$
Vielfachheiten, zusammenhang
→ $1 \leqslant \mu^{geo}(A, \lambda) \leqslant \mu^{alg}(A, \lambda)$
ähnlich Matrizen haben haben dasslebe χ
→ A ähnlich zu $\hat{A}$, dann ist $\chi_A = \chi_{\hat{A}}$
Char.polynom von Endos
Wir definieren $\chi_f = \chi_A$ für $A = \mathscr{M}_{B_V}^{B_V}(f)$
→Eigenwerter sind Nullstellen des char. Polynoms
→ ähnliche Matrizen haben selbe Spur
Wir definieren:
→ Spur(f) = Spur(A), für $A = \mathscr{M}_{B_V}^{B_V}(f)$
Diagonalisierbarkeit
f ist diagonalosierbar ⇔ $\chi_f = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_i)^{n_i}$, also χ_f ganz zerfällt.
Die vielfachheiten gilt: $\sum_{i=1} n_i = n$
→ $\mu^{geo} = \mu^{alg} \Rightarrow$ diagonalisierbarkeit

Algebren

Definition

$(A,+,\cdot,\star)$ über K ist eine (assoziative) Algebra, wenn:

$\rightarrow (A,+,\cdot)$ ein Vektorraum ist.

$\rightarrow (A,+,\star)$ ist ein Ring.

$\rightarrow (\alpha\cdot a)\star b=\alpha\cdot(a\star b)=a\star(\alpha\cdot b), \forall\alpha\in K, \forall a,b\in A$

$\hookrightarrow$ Eine Algebra ist kommutativ, wenn $\star$ kommutativ ist.

$\hookrightarrow$ Eine Uniutäre Algebra hat ein neutrales Element bezüglich $\star$.

Multiplika $-\star$ ist bilinear

$\rightarrow (\alpha\cdot a+\beta\cdot b)\star c=\alpha\cdot(a\star c)+\beta\cdot(b\star c)$

$\rightarrow a\star(\beta\cdot b+\gamma\cdot c)=\beta\cdot(a\star b)+\gamma\cdot(a\star c)$

Es gilt:

$\rightarrow$ Jeder Körper ist kommutative Algebra über sich selbst.

Algebrahoms

$\rightarrow f(a+_1 b)=f(a)+_2 f(b)$

$\rightarrow f(\alpha\cdot a)=\alpha\cdot f(a)$

$\rightarrow f(a\star_1 b)=f(a)\star_2 f(b)$

$\rightarrow$ wenn algebra mit 1 muss $f(1_1)=1_2$

Algebrahoms kommutieren mit Polynomen

Wenn p() ein Polynom ist, und f ein Algebrahom, dann

$\rightarrow f(p(a))=p(f(a))$

Satz von Cayley Hamilton

$\rightarrow \chi_A(A)=0$, also A in ihr Polynom eingesetzt ist null.

$\rightarrow$ gilt für endos f

A^{-1} is ein Polyno von A

Wenn A invertierbar, gibt es ein p, sodass

$\rightarrow A^{-1}=p(A)$

Ideale

Ideale sind Unterringe, sodass:

$\rightarrow RJ\subset J$ und $JR\subset J$

$\rightarrow$ Kerne von Ringhoms sind Ideale.

$\rightarrow$ Durchschnitt von Idealen ist wieder Idieal

Ideal erzeugen:

$\rightarrow (E)=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \mid \exists n\in\mathbb{N}_0 \forall i=1,..,n(a_i\in E\cup -E\cup RE\cup ER\cup RER)\right\}$

$\rightarrow$ Wenn Ring mit eins, so muss a_i nur$\in RER$

$\rightarrow$ Hauptideal ist Ideal, welches nur ein Element als Erzeuger hat.

Minimalpolynom

annulierende Polynome sind ein Ideal

$\rightarrow J_A=\{p\in K[\lambda] \mid p(A)=0\}$

Minimalpolynom

$\rightarrow \mu_A$ heißt Minimalpolynom, wenn $\mu_A\in J_A$ und das normierte Polynom kleinsten Grades ist.

$\rightarrow \mu_A=\mu_f$, wenn A Darstellungsmatrix von f ist.

$\rightarrow$ ähnliche Matrizen haben gleiches Minimalpolynom

Bestimmen vong μ

$\rightarrow$ char Polynom von A aufstellen, Faktorisieren, Potenzen Weglassen, aber schauen, dass μ_A noch χ_A teilt, und dann A einsetzen und schauen ob die Nullmatrix rauskommt.

Zweiter Weg

Potenzen von der Matrix A aufstellen (bei 0 anfangen), diese MAtrizen dann vectoriesiern (GanzesA als ein Spaltenvektor), dann schauen ab welcher Potenz sich lin. abhängigkeit einschleicht. Matrix aufstellen mit den Spalten = die vektorisierten MatrizenPotenzen (bis zu potenz wos lin abhängig wird) dann den Kern dieser Matrix bestimmen. Kern ist ein Vektor, der zu einem Polynom synthetisiert werden kann.

Minimalpolynom Eigenachaften

$\rightarrow \mu_A$ teilt jedes $p\in J_A \rightarrow \mu_A$ hat gleiche Nullstellen wie χ_A

$\rightarrow$ Eigenwerte sind Nullstellen von μ_A

$\rightarrow$ zerfällt μ_A in einfache (Potenz 1) Linearefaktoren, so ist A diagonalisierbar

Begleitmatrix

Fürn normiertes Polynom ist C_p die Begleitmatrix:

$$C_p=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1\\ 0 & & & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\alpha_2\\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$$

Es gilt: $\chi_{C_p}=\mu_{C_p}=p$

Frobenius Normalform

Vowissen für Frob

$\rightarrow$ lokal annulierende Polynome sind Ideal:

$\rightarrow J_{A,x}=\{p\in K[\lambda] \mid p(A)x=0\}$

$\rightarrow$lokales Minimalpolynom = $\mu_{A,x}\in J_{A,x}$, normiertes mit kleinstem Grad.

$\rightarrow \mu_{A,x}=\mu_{f,v}$, wenn A Darstellungsmatrize von f ist, und x der Koordinatenvektor von v.

$\rightarrow$ lokales Minimalpolynom teilt alle $p\in J_{A,x}$

$\rightarrow$ lokales Minimalpolynom teilt das Minimalpolynom

$\rightarrow$ Fürn lokales Minimalpolynom $\mu_{A,x}$, ist der Unterraum

$\langle x, Ax, A^2x,..,A^{d-1}x\rangle$, ein A- invarianter Unterraum.

$\rightarrow$ Wählen wir x so, dass der A-invariante Unterraum möglichst goß ist, heißt x, ein maxiamler Vektor.

$\rightarrow$ lokale Minimalpolynome mit maximalen Vektor sind minimal Polynome

Frobenius Normalform

$\rightarrow p_1=\mu_A$ und $P_{j+1}\mid p_j$

A ist ähnlich zu $\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k}\end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Sowol die Matrix, also auch p_j sind eindeutig.

$\rightarrow$ Die p_j heißen Normalteiler der Matrix A

$\rightarrow$ Begleitmatrix dim=m hat maximal 2m-1 Einträge $\neq 0$, damit hat FrobNormalform maximal 2n-k Einträge $\neq 0$

$\rightarrow$ Zwei matrizen sind genau dann ähnlich wenn diegleiche Frob.normalform.

JordanNormalform

Verallgemeineter Eigenvektor/Hauptvektor

Hauptvektor zum Eigenwert λ der Matrix A ist:

$\rightarrow (\lambda I-A)^k x=0$ wobei k, die Stufe des Hauptvektors genannt wird

$\rightarrow$ Die Menge aller Hauptvektoren von A zu λ nennen wir verallgemeiner Eigenraum: $GEig(A,\lambda)$

$\rightarrow$ Verallgemeinerte Eigenräume sind A-invariant

$\rightarrow$ Wenn $A\in K^{n\times n}$, dann gilt: $Kern(A^n)=Kern(A^{n+j})$

$\rightarrow$Wenn χ_A vollständig in linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

$K^n=\bigoplus_{j=1}^{s} GEig(A,\lambda_j)$.

Jordanblock

Ein Jordanblock der dimension r ist:

$$J_r(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ für r=1 ist der BLock nur λ

$\rightarrow J_r(\lambda)$ ist ähnlich zu C_p von $p=(t-\lambda)^r$

$\hookrightarrow \chi_{J_r}(\lambda)=\mu_{J_r}(\lambda)=(t-\lambda)^r$

$\rightarrow$ Jordan-Normalform hat nur Jordanblöcke auf der Diagonalen

$\rightarrow$ Die Jordannormalformen von A unterscheiden sich nur in Reihenfolge der BLöcke

$\rightarrow$ Wenn χ_A komplett in LF zerfällt, gibt es eine Jordannormalform

Eigenschaften Jordanform

$\rightarrow \chi_A=\prod_{j=1}^{k}(t-\lambda_j)^{r_j}$

$\rightarrow \mu_A=\prod_{\lambda\in\Lambda(A)}(t-\lambda)^{max\{r_j|\lambda_j=\lambda\}}$

$\rightarrow \mu^{alg}(A,\lambda)=\sum_{\lambda_j=\lambda} r_j$

Also Summe der Dimensionen aller Jordanblöcke mit diesem Lampda.

$\rightarrow \mu^{geo}(A,\lambda)=\sum_{\lambda_j=\lambda} 1$

Anzahl der Jordanblöcke mit genau dem lamdda.

Innenprodukte

Bilineraformen Billinearformen sind:

$\rightarrow$ symmetersich, wenn $\gamma(u,v)=\gamma(v,u)$

$\rightarrow$schiefsymmetrisch, wenn $\gamma(u,v)=-\gamma(v,u)$

$\rightarrow$alterniered, wenn $u=v\Rightarrow\gamma(u,v)=0$

Darstellungsmatrix von γ

Sei $B_v=(v_1,..v_n)$ Basis von V

$\rightarrow \mathscr{M}^{B_v}_{B_v^*}(\gamma)=(\gamma(v_i,v_j))_{i,j=1}^n\in K^{n\times n}$

$\rightarrow$ Wenn endlich dimensional ist die duale Bilinearform γ^* von γ gegeben durch:

$\hookrightarrow \gamma^*(u,v)=\gamma(v,u)$

$\rightarrow$ Transformation mit $\hat{A}=T^{-T}AT^{-1}$, wenn T von alt nach neu

Kongruenztransform

$\rightarrow A,\hat{A}$ heißen kongruent, wenn

$\hookrightarrow \hat{A}=T^{-T}AT^{-1}$

$\rightarrow \hat{A}$ ist dann symmterisch, wenn es A ist. (Symmetrei bleibt erhalten)

Rang

$\rightarrow Rang(\gamma)=Rang(A)$, wenn A darstellungatrix von γ.

Eigenschaften

$\rightarrow \gamma$ ist nicht ausgeartet, wenn die linearen Abbildungen, bei denen ich jeweils ein Argument einsetzte und das Andere frei lasse, beide injektiv sind.

$\rightarrow \gamma$ heißt perfekt, wenn diese lin, Abbildung sogar bijektiv sind.

Es ist äquivalent:

$\hookrightarrow u\mapsto\gamma(u,\cdot)$ ist injektiv

$\hookrightarrow v\mapsto\gamma(\cdot,v)$ ist injektv

$\hookrightarrow \gamma$ ist nicht ausgeartet.

$\hookrightarrow \gamma$ ist perfekt.

$\hookrightarrow$ A ist regulär.

$\hookrightarrow$ Rang(γ) = Rang(A) = n

quadratische Formen

q(v) ist quadratische Form, wenn gilt:

$\hookrightarrow q(\alpha v)=\alpha^2 q(v)$

$\hookrightarrow \Gamma(u,v)=q(u+v)-q(u)-q(v)$ ist $\in Bil(V,K)$

$\rightarrow$ Menge aller Quadratischen Formen = QF(V).

$\rightarrow$ Quadratische Formen bilden Vektorraum

$\rightarrow q_\lambda(u)=\gamma(u,u)$

$\hookrightarrow$ Wenn $char(K)\neq 2$ sind die quadratischen Isomorph zu den symmetrischen bilineraformen.

$\rightarrow dim(QF(V))=dim(Bil_{sym}(V,V))=\frac{1}{2}n(n+1)$

Polarisationsformeln, um von q-form zu bilinear zu kommen:

$\gamma_q(u,v)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$

Orthogonalität $\rightarrow (V,\gamma)$ heißt quadratischer Raum, wenn γ ein sym. bilinerform ist.

$\rightarrow$ Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn gilt $\gamma(u,v)=0$, also $u\perp v$

$\rightarrow$die mengen$E_1\perp E_2$ sind orhogonal, wenn jedes Ihrer elemente orthogonal sind.

$\rightarrow$ Eine Menge $E\subset V$ heißt orthgonal, wenn $u\perp v, \forall u,v\in E$

$\rightarrow E^\perp=\{v\in V|\gamma(u,v)=0, \forall u\in E\}$heißt orhtogonales komplement

Satz vong Pythagoras

$\rightarrow \gamma\left(\sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma(v_i,v_j)$

orhtogonale direkte Summe

$\rightarrow U_i\perp U_j, \forall i\neq j$.

$\rightarrow$ geschreiben: $\bigoplus_{i\in I} U_i$.

$\rightarrow U_i$ sind Unterräume, die zueinander orthogonal sind.

$\rightarrow$ Wenn B_v eine orhtogonalbasis von V ist, dann ist die Darstellungsmtrix $\mathscr{M}^{B_v}_{B_v^*}(\gamma)$ diagonal.

Homomorphismen quadratischer Räume

$\hookrightarrow$ f muss linear sein.

$\hookrightarrow \gamma_2(f(u),f(v))=\gamma_1(u,v), \forall u,v\in V$

$\rightarrow$ ISt f ein Isio quad räume, dann auch f^{-1}, Wenn endlich dim, dann $Rang(\gamma_1)=Rang(\gamma_2)$

$\rightarrow$ Man kann die Basis so wählen, dass Darstellungsmtrix von γ nur einträge aud der Diagonalen hat (bis zum Rang r von γ), danach nur noch 0en auf der Hauptdioagonalen

$\rightarrow$ Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix

Signatur

$\rightarrow$Is der Körper = $\mathbb{R}$, gibt es eine Basis von V, sodass:

$$\mathscr{M}^{B_v}_{B_v^*}(\gamma)=\begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0}\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Signatur(n_+,n_-,n_0)

$\rightarrow$Is der Körper = $\mathbb{C}$, gibt es eine Basis von V, sodass:

$\mathscr{M}^{B_v}_{B_v^*}(\gamma)=\begin{bmatrix} I_r & \\ & 0\end{bmatrix}$ Mit $r=rang(\gamma)$

Trägheitssatz vong Sylvester

Die Signatur, der durch A induzierten Bilinarform γ_A ist durch A eindeutig festgelegt.

Euklidische Räume

Definitheit

Für eine Bilinearform γ gilt:

$\hookrightarrow$ positiv definit, wenn $\gamma(v,v)>0\forall v\neq 0$

$\hookrightarrow$ positiv semidefinit, wenn $\geqslant$.

$\hookrightarrow$ negatv definit, wenn $\gamma<0$.

$\hookrightarrow$ negativ semidefinit, wenn $\leqslant$.

$\hookrightarrow$ indefitnit, wenn nix davon stimmt.

$\rightarrow$ Definitheit kann man ablesen, wenn Darstellugnmatrix nur positive eintrage hat. etc.

Euklidischer Raum

Euklidicsher Raum ist ein Vektorraum mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinerform

$\rightarrow$ Also haben diese Bilinearformen die Signatur(n,0,0)

$\rightarrow (x,y)\mapsto y^T x$ heißt Standart Innenprodukt/Skalaprodukt

$\rightarrow$ Im euklidischen Raum sind orthogonale Familien an Vektoren auch Linear unabhängig.

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\rightarrow \gamma(u,v)^2\leqslant\gamma(u,u)\gamma(v,v)$ oder $|\gamma(u,v)|\leqslant\sqrt{\gamma(u,u)}\sqrt{\gamma(v,v)}$

Normen

$\|\cdot\|:V\rightarrow\mathbb{R}$ heißt Norm, wenn:

$\hookrightarrow \|u\|\geqslant 0$ und $\|u\|=0\Rightarrow u=0$

$\hookrightarrow \|\alpha U\|=|\alpha|\|u\|$

$\hookrightarrow \|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$

$\rightarrow$ BilForm induzieren Norm

$\|\cdot\|\gamma:u\mapsto\|u\|\gamma=\sqrt{\gamma(u,u)}$

$\rightarrow$ Satz von Pythagoras

$\left\|\sum_{k}^{i=1} v_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{k}\|v_i\|^2$

Normieren

$\rightarrow u\in V$ ist ein einheitsvektor(normierter Verktro), wenn $\|u\|=1$.

$\rightarrow u$ zu normieren, teilt man den Vektor durch seine Norm $\frac{u}{\|u\|}$

Orthogonale Projektion

$proj_u^\gamma(v)=\frac{\gamma(v,u)}{\|u\|^2}u$

$\rightarrow V=Bild(proj_u^\gamma)\bigoplus Kern(proj_u^\gamma)$

Gramm-Schmidt-Verfahren

Nur wenn char(K) $\neq 2$, Macht aus linear unabhängigen Familie eine Orhogonale fam.

v_i sind lin unabhängigr fam, und u_i soll der Output sein.

Setze $u_1=v_1$, danach:

$u_j=v_j-\sum_{i=1}^{j-1} proj_{u_i}^\gamma(v_j)$

jetzt hat man u_1 und findet mit der Formel oben u_2 heraus und macht das für jedes weitere u_i, das mach braucht.

Will man eine Orthonormale menge, so normiert man alle vektoren halt noch.

$\rightarrow$ Es gilt: $\langle v_1,...,v_n\rangle=\langle u_1,...,u_n\rangle$

Orthognale Abbildungen

$\rightarrow f:V\rightarrow W$, für V und W Euklidische Räume. f soll orthogonal sein.

$\hookrightarrow$f muss linear sein.

$\hookrightarrow \gamma_2(f(u),f(v))=\gamma_1(u,v)$

$\rightarrow$ Orthogonale Abbildungen f sind injektiv

$\rightarrow$ Haben die beiden Räume, diegleiche endliche Dimension, ist f auch bijektiv

$\rightarrow$ Komposition orthogonaler Abbildungen ist Orthogonale

$\rightarrow$ Wenn M die Darstellungsmatrix von γ ist und x der Koordinatenvektorn von v und y der ...von v, dann gilt: $\gamma(u,v)=x^T My$

Orthogonalität von f

$\hookrightarrow f$ ist (γ_1,γ_2)-orthogonal.

$\hookrightarrow A^T M_2 A=M1$, wenn M wieder Darstellung von γ ist und A die Darstellung von f.

$\rightarrow$ Wenns Orthonormalbasen sind, dann ist $M_2=I_n$ und $M_1=I_m$

$\rightarrow$ Bei Endos ist $M_1=M_2=M$

$\rightarrow$ Eigenwerte von γ-orthogonalen Endos sind nur 1 oder -1.

Orthogonale Gruppe

$\rightarrow \gamma$-orhtogonale Endos bilden mit Komposition eine Gruppe, genannt: $O(V,\gamma)$

$\rightarrow$ die spezielle Orthogonale Gruppe ist:

$SO(V,\gamma)=\{f\in O(V,\gamma)|det(f)=1\}$

$\rightarrow$ Gleiches gilt für deren Darstellugnsmtarizen.

Riez-Abbildung

Riez-Iso

Im endlich dim.ist $\Gamma:V\ni v\mapsto\gamma(\cdot,v)\in V^*$ ein Iso.

$\gamma(u,v)=\langle\Gamma(v),u\rangle=\langle\Gamma(u),v\rangle=\gamma^{-1}(\Gamma(u),\Gamma(v))$

Man schreibt fü den Riez-Iso auch: $\Gamma_{V\rightarrow V^*}$

$\rightarrow$ Bei R^n, dann $\Gamma:\mathbb{R}^n\ni x\mapsto Mx\in(\mathbb{R}^n)^*$

Wenn zwei euklidische Räume gleiche dim haben ist äquivalent:

$\hookrightarrow$ f ist (γ_1,γ_2)-orthogonal

$\hookrightarrow f^*$ ist $(\gamma_2^{-1},\gamma_1^{-1})$-orthogonal

Bei Endos dann:

$\hookrightarrow$ f ist λ-orhtogonal.

$\hookrightarrow f^*$ ist γ^{-1}- orthogonal

Adjungierte Homs

Sei $f\in Hom(V,W)$, für V,W euklidische Räume, so ist die zu f adjungierte Abildung

$\rightarrow f^\circ=\Gamma^{-1}_{V\rightarrow V^*}\circ f^*\circ\Gamma_{W\rightarrow W^*}$ geht von $W\rightarrow V$

Es gilt für die adjungierte:

$\rightarrow \gamma_2(w,f(v))=\gamma_1(f^\circ(w),v)$

Die Adjugierte ist von den jeweiligen Bililinearformen γ_1,γ_2 abhängig.

Wenn A die Darstellung von f ist, gilt:

$\rightarrow A^\circ=\mathscr{M}^{Bw}_{Bv}(f^\circ)=M_1^{-1}A^T M_2$

$\rightarrow A^\circ$ ist Darstellung von f°

$\rightarrow$ Die zu f biadjungierte ist identisch zu f, also $f^{\circ\circ}=(f^\circ)^\circ=f$

Fundamentale Unterräume

$\rightarrow Bild(f^\circ)=Kern(f)^\perp\in V$

$\rightarrow Kern(f^\circ)=Bild(f)^\perp\in W$

$\rightarrow Bild(f)=Kern(f^\circ)^\perp\in W$

$\rightarrow Kern(f)=Bild(f^\circ)^\perp\in V$

$\rightarrow$ Edlich Dim V gilt:

$\rightarrow V=Kern(f)\bigoplus Bild(f^\circ)$

$\rightarrow V=Kern(f^\circ)\bigoplus Bild(f)$

Selbstadjungiertheit und normale Endos

$\rightarrow$ f ist $\gamma-$selbstadjungiert, wenn $f=f^\circ$

$\rightarrow$ f ist $\gamma-$normal, wenn $f\circ f^\circ=f^\circ\circ f$

Wenn M darstellung von γ und A die Darstellung von einem Endo f, ist äquivalent:

$\hookrightarrow$ f ist $\gamma-$selbstadjungiert.

$\hookrightarrow$ A erfüllt $A^\circ=A$, also $M^{-1}A^T M=A$

Bei orthonormalbasis ist M = I, also muss nur $A=A^T$

Wenn M darstellung von γ und A die Darstellung von einem Endo f, ist äquivalent:

$\hookrightarrow$ f ist $\gamma-$normal.

$\hookrightarrow$ A erfüllt $AA^\circ=A^\circ A$, also $AM^{-1}A^T M=M^{-1}A^T MA$

Bei orthonormalbasis $AA^T=A^T A$

$\rightarrow$ ist f $\gamma-$selbstadjungiert, dann auch normal

$\rightarrow$ ist f $\gamma-$orhtogonal, dann auch normal

KErn und bild selbstadjungierter

$\rightarrow Kern(f^\circ)=Kern(f)$

$\rightarrow Bild(f^\circ)=Bild(f)$

$\rightarrow V=Kern(f)\bigoplus Bild(f)$

$\rightarrow V=Kern(f^\circ)\bigoplus Bild(f^\circ)$

Eigenvektoren selbstadjungierter

$\rightarrow$ Sei f selbstadjunkter Endo mit λ_1,λ_2 verschiede Eignewerte und v_1,v_2die Eigenvektoren dazu. Dann sind v_1,v_2 bzgl. γ Orthogonal.

$\rightarrow$ Sei f selbstadjunkter endo und U ein f-invarianter U-Raum, dann ist U^T auch f-invariant.

Gleiches gilt für Matrizen, die darstellung von Endo sind.

Einheitsphäre/ Rayleigh-Quotient

$\rightarrow$ Einheitsshäre: $S(V,\gamma)=\{v\in V|\|v\|_\gamma=1\}$

$\rightarrow$ Rayleigh Quotient: $R_{f,\gamma}:V\backslash\{0\ni v\mapsto\frac{\gamma(v,f(v))}{\|v\|^2_\gamma}\in\mathbb{R}$

$\rightarrow$ Der Quitient hat ein Supremum und nimmt diese als MAximum an.

$\rightarrow$ Der maximaste Rayleigh quotient m ist auch der größte eigenwert von f.

Spektralsatz

V endlich dim. Euklidische Raum und f ein endo. Es ist äquivalent:

$\hookrightarrow$ f ist $\gamma-$selbstadjungiert.

$\hookrightarrow$ f ist diagonalisierbar und es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von f, die $\gamma-$orthogonal sind.

Komplexes Innenprodukt

Antilinear

f ist antilinear wenn gilt: $\rightarrow f(u+v)=f(u)+f(v)$

$\rightarrow f(\alpha u)=\overline{\alpha}f(u)$

dabei ist $\overline{\alpha}$, das komplex konjugierte zu α.

Für w_i,v_i Basisvektoren, wenn $f:V\rightarrow W$

Die Darstellungsmatrix von f ist auch wieder $A=\mathscr{M}^{Bv}_{Bw}(f)$

Es gilt aber:

$\rightarrow f(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j w_i$, wenn f linear

$\rightarrow f(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\overline{\alpha_j}w_i$, wenn f antilinear

Sequilinearform

Sequilinieraform $\theta:V\times V\rightarrow\mathbb{C}$, wenn antilienar im ersten Arguemnt und linear im zweiten:

$\rightarrow \theta(\alpha u+\beta v,w)=\overline{\alpha}\theta(u,w)+\overline{\beta}\theta(v,w)$

$\rightarrow \theta(u,\alpha v+\beta w)=\alpha\theta(u,v)+\beta\theta(u,w)$

$\rightarrow$ wenn $\theta(u,v)=\overline{\theta(v,u)}$ ist hermetisch

$\rightarrow$ wenn $\theta(u,v)=-\overline{\theta(v,u)}$ ist schiefhermetisch

Es ist äquivalent:

$\hookrightarrow \theta$ ist hermetisch.

$\hookrightarrow \theta(v,v)\in\mathbb{R}$ für alle $v\in V$

Definiteiten/Innenprodukt

$\rightarrow$ Die Definiteheitne sind genauso definiert wie bei bilinearformen, $(\theta(v,v)>0 => positivdefinit)$

$\rightarrow$ Eine positiv definite hermetische Sequilinearform θ ist ein Innenprodukt auf Komplexen Vektorräumen.

Darstellung:

$\mathscr{M}^{Bv}_{B^*v}(\theta)=(\theta(v_i,v_j))_{i,j=1}^n\in\mathbb{C}^{n\times n}$

Nützliches bsp.

v_i sind Basis in V

$\theta(v,u)=\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i,\sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\theta(v_i,v_j)=\begin{pmatrix}\overline{\alpha_1}\\ \vdots\\ \overline{\alpha_n}\end{pmatrix}\mathscr{M}^{B_v}_{B^*v}(\theta)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

konjugiert transponierte Matrix

Wenn $A\in\mathbb{C}^{n\times m}=(a_{ij})$ dann ist das konjugiert Transponierte

$\overline{A}^T=A^H\in\mathbb{C}^{m\times n}$ hat die Einträge $\overline{a_{ji}}$

Das geht auch für Spalten $\mathbb{C}^m$, also:

$$\theta(u,v)=\alpha^H\mathscr{M}^{Bv}_{B^*v}(\theta)\beta$$

$\rightarrow$ Hermetisch, wenn $A=A^H$

$\rightarrow$ antihermetisch, wenn $A=-A^H$

Rechenregeln für konjugierte Transpo

$\rightarrow (A^H)^H=A$

$\rightarrow (A+B)^H=A^H+B^H$

$\rightarrow (\alpha A)^H=\overline{\alpha}A^H$

$\rightarrow (AC)^H=C^H A^H$

Transformation

$\mathscr{M}^{\hat{B}v}_{\hat{B}^*v}(\theta)=\mathscr{T}^{B^*v}_{\hat{B}^*v}\mathscr{M}^{Bv}_{B^*v}(\theta)\mathscr{T}^{\hat{B}v}_{Bv}$

$\rightarrow$ hermetisch kongruent $\hat{A}=T^{-H}AT^{-1}$

Ähnlichkeiten

$\rightarrow$ Chauchy Schwarz is gleich

$\rightarrow$ Norm ist gleich definiert

$\rightarrow$ Satz von pythagoras gleich

$\rightarrow \theta(v,u)=0$, dann orthogonal

$\rightarrow$normieren geht gleich

$\rightarrow$ gram schmidt geht genauso, projektion also auch, Zerlegung von V mittles PRojekttion auch.

$\rightarrow$ Achtung: reihenfolge der Argumente darf NICHT vertauscht werden

Unitäre Abbildungen

$\rightarrow$ copy paste mit T durch H ersetzt.

$\rightarrow$ Unitäre gruppe = copy paste von Orhtogonaler

Eigenwerte unitärer

Ist f unitär, ist der Betrag jedes Eigenwertes $|\lambda|=1$

Die eigenwerte selbstadjungierter sind reel

Riez-Iso- Komplex

$\rightarrow\Theta:V\ni u\mapsto\theta(u,\cdot)\in V^*$

$\rightarrow \theta(u,v)=\langle\Theta(u),v\rangle=\overline{\langle\Theta(v),u\rangle}=\theta^{-1}(\Theta(u),\Theta(v))$

Spektralsatz komplex

$\hookrightarrow f$ ist θ-normal.

$\hookrightarrow$ f ist orthonormal diagonalisierbar.

By Captain Joni.info